ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИИЗОМЕТРИИ НА ГЛАДКИХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.С. Афанасьева

Аннотация. В работе изучается граничное поведение конечно билипшицевых отображений на гладких римановых многообразиях.

Ключевые слова: гладкие римановы многообразия, конечно билипшицевы отображения, модули, нижние Q-гомеоморфизмы.

AMS 2010 Subject Classification: 30L10, 30C65

1 Введение

Напомним некоторые определения из теории римановых многообразий, которые можно найти, например, в монографиях [6], [17], [15] и [19]. Напомним, что *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U – открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ – гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат.* Полный набор всех карт многообразия называется его *атласом. Гладкое многообразие* – многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким (C^∞) образом.

Римановым многообразием $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие с заданной на нем римановой метрикой, т.е. положительно определенным симметричным тензорным полем $g = g_{ij}(x)$, которое определяется в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x))\ \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\quad ,$$

где, как обычно, k и $l = 1, ..., n$ – так называемые связанные индексы, по которым производится суммирование. $g_{ij}(x)$ в дальнейшем подразумевается гладким. Заметим, что $det g_{ij} > 0$ в силу положительной определенности g_{ij}, см., напр., [3, с. 277].

Элемент длины задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j,$$

где g_{ij} – метрический тензор, x^i – локальные координаты. В соответствии с этим, если $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$ – кусочно-гладкая кривая и $x(t)$ – ее параметрическое задание в локальных координатах, то ее длина вычисляется по формуле:

$$s_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\ \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\ dt$$

Геодезическое расстояние $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 в $(\mathbb{M}^n, g)$. Любая кривая, соединяющая p_1 и p_2, на которой реализуется этот инфимум, называется *геодезической.*

Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой $dV = \sqrt{det g_{ij}}\ dx^1...dx^n$, а *элемент площади* гладкой поверхности H на $(\mathbb{M}^n, g)$ $d\mathcal{A} = \sqrt{det\ g^*_{\alpha\beta}}\ du_1...du_{n-1}$ – инвариантной формой, где $g^*_{\alpha\beta}$ – риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле:

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}.$$

Здесь $x(u)$ – гладкая параметризация поверхности H с $\nabla_u x \neq 0$ всюду. Таким образом, метрический тензор g на римановом многообразии порождает соответствующий метрический тензор g^* на произвольной регулярной поверхности, см., напр., § 88 в [19].

Здесь под *поверхностью* на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ понимается непрерывное отображение $H : U \to \mathbb{M}^n$, где U – область в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ или, более общо, U – $(n-1)$-мерное многообразие, например, $(n-1)$-мерная сфера. Если отображение H является гладким в локальных координатах, то поверхность называют *гладкой.* Например, геодезическая сфера в достаточно малой окрестности произвольной точки гладкого риманова многообразия – гладкая поверхность, см. монографию [15, с. 106].

Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [15], а также [6, с. 260 - 261].

Предложение 1.1. *Для каждой точки риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка лучей, исходящих из начала координат.*

Указанные окрестности и координаты принято называть *нормальными.*

Замечание 1.2. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор в начале координат в этих координатах совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [15].

2 О нижних Q-гомеоморфизмах на гладких римановых многообразиях

В дальнейшем мы используем обозначения геодезических сфер $S(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{M}^n : d(P, P_0) = \varepsilon\}$, геодезических шаров $B(P_0, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{M}^n : d(P, P_0) < \varepsilon\}$ и геодезических колец $\mathbb{A}(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{P \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(P, P_0) < \varepsilon_0\}$, где d – геодезическое расстояние на $(\mathbb{M}^n, g)$ и подразумеваем, что $S(P_0, r)$, $B(P_0, r)$ и $\mathbb{A} = \mathbb{A}(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ лежат в нормальной окрестности точки P_0. Далее для любых множеств A, B и C в $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, через $\triangle(A, B; C)$

обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a,b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A\,, \gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ при $a < t < b\,.$

Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ называем *допустимой* для семейства Γ поверхностей S в $\mathbb{M}^n$, пишем $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geq 1 \quad \forall\ S \in \Gamma. \tag{2.1}$$

p-модуль семейства поверхностей Γ при $p \in (0,\infty)$ есть величина

$$M_p(\Gamma) := \inf_{\rho\ \in\ adm\ \Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^p\ dV.$$

При $p = n$ получаем конформный модуль и в этом случае используем обозначение $M(\Gamma)$.

Аналогично статье [9], см. также монографию [16], борелеву функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ называем *обобщенно допустимой* для семейства Γ поверхностей S в $\mathbb{M}^n$ относительно p-модуля, пишем $\rho \in ext_p\, adm\,\Gamma$, если условие допустимости (2.1) выполнено для p-почти всех (p-п.в.) $S \in \Gamma$, т.е. за исключением подсемейства Γ нулевого p-модуля. При $p = n$ пишем $\rho \in ext\, adm\,\Gamma$.

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений в [4], было впервые введено в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в [9].

Пусть всюду далее D и D_* – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно, $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to D_*$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* $P_0 \in \overline{D}$, если существует $\delta_0 \in (0, d(P_0))$, $d_0 := \sup\limits_{P\in D} d(P_0, P)$, такое что для всякого $\varepsilon_0 < \delta_0$ и любых геодезических колец $\mathbb{A} = \mathbb{A}(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, выполнено условие

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon))\ \geq\ \inf_{\rho\ \in\ ext_p\ adm\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D} \frac{\rho^p(P)}{Q(P)}\, dV, \tag{2.2}$$

где через Σ_ε обозначено семейство пересечений всех геодезических сфер $S(P_0, r), r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с областью D. Будем также говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ является *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля*, если f является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в каждой точке $P_0 \in \overline{D}$, ср. с [16].

Следующий критерий нижних Q-гомеоморфизмов, см. теорему 2.1 в [9] и теорему 9.2 в [16], впервые был доказан для конформного модуля в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$; при $p \neq n$ в $\mathbb{R}^n$, см. теорему 9.2 в [5], а также для гладких римановых многообразий $(\mathbb{M}^n, g)$ при $n \geq 2$ относительно конформного модуля, см. теорему 4.1 в [1].

Теорема 2.1. *Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно, $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ – измеримая функция, и $P_0 \in \overline{D}$. Гомеоморфизм $f : D \to D_*$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля, $p > n-1$, в точке P_0, тогда и только тогда, когда для любой нормальной окрестности*

$B(P_0,\varepsilon_0)$ точки P_0 с $0<\varepsilon_0<d_0:=\sup\limits_{P\in D} d(P_0,P)$

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon))\ \geq\ \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{||\,Q||\,_s(P_0,r)}\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{2.3}$$

где $s=\frac{n-1}{p-n+1}$, Σ_ε – семейство всех пересечений с областью D геодезических сфер $S(P_0,r)$, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, и

$$||\,Q||\,_s(P_0,r)=\left(\int\limits_{D(P_0,r)} Q^s(P)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{2.4}$$

– L^s-норма Q по $D(P_0,r)=\{P\in D: d(P,P_0)=r\}=D\cap S(P_0,r)$.

Заметим, что инфимум в (2.2) достигается для функции

$$\rho_0(P)\ =\left[\frac{Q(P)}{||\,Q||_s(P_0,d(P,P_0))}\right]^{\frac{1}{p-n+1}}.$$

Таким образом, неравенство (2.3) является точным для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

Proof. Отметим, что в (2.2) по теореме Лузина, предложению 1.1 и замечанию 1.2

$$\inf\limits_{\rho\ \in\ adm\ \Sigma_\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D}\frac{\rho^p(P)}{Q(P)}\ dV\ =\inf\limits_{\rho\ \in\ ext_p\ adm\ \Sigma_\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D}\frac{\rho^p(P)}{Q(P)}\ dV.$$

Также для любого $\rho\in ext_p\ adm\ \Sigma_\varepsilon$,

$$\widetilde{A}_\rho(r)\ :=\int\limits_{D(P_0,r)}\rho^{n-1}(P)\ d\mathcal{A}\ \neq\ 0\quad\text{п.в.}$$

является измеримой функцией по параметру r, скажем по теореме Фубини, предложению 1.1 и замечанию 1.2. Таким образом, мы можем требовать равенство $\widetilde{A}_\rho(r)=1$ п.в. вместо условия допустимости (2.1) и

$$\inf\limits_{\rho\ \in\ ext_p\ adm\ \Sigma_\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D}\frac{\rho^p(P)}{Q(P)}\ dV=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\inf\limits_{\widetilde{\alpha}\in\ I(r)}\int\limits_{D(P_0,r)}\frac{\widetilde{\alpha}^q(P)}{Q(P)}\ d\mathcal{A}\right)dr,$$

где $q=p/(n-1)>1$, $\mathbb{A}=\mathbb{A}(P_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, и $I(r)$ обозначает множество всех борелевых функций $\widetilde{\alpha}$ на поверхности $D(x_0,r)$, таких, что

$$\int\limits_{D(P_0,r)}\widetilde{\alpha}(P)\ d\mathcal{A}=1.$$

Поэтому теорема 1 следует из леммы 2.1 в [9], см. также лемму 9.2 в [16] для $X=D(P_0,r)$ с мерой площади на $D(P_0,r)$ в качестве μ, $\varphi=\frac{1}{Q}|_{D(P_0,r)}$ и $q=p/(n-1)>1$. $\square$

Следующий результат сначала был доказан на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, относительно конформного модуля, см. лемму 4.1 в [1].

Лемма 2.2. *Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geq 2$, $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция и $f : D \to D_*$ – нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $P_0 \in \overline{D}$, $p > n-1$. Тогда*

$$M_\alpha \left(\Delta(f(S_\varepsilon), f(S_{\varepsilon_0}); D_*)\right) \leq c/I^s, \tag{2.5}$$

где $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$, $S_\varepsilon = S(P_0, \varepsilon)$ и $S_{\varepsilon_0} = S(P_0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $B(P_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки x_0,

$$I = I(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||Q||_s(P_0, r)}, \tag{2.6}$$

$||Q||_s(P_0, r)$ определено в (2.4), а константа c произвольно близка к 1 в достаточно малых окрестностях точки P_0.

Proof. Учитывая тот факт, что по замечанию 1.2 метрический тензор в начале нормальных координат совпадает с единичной матрицей и, следовательно, в достаточно малом шаре с центром в нуле равномерно близок к единичной матрице, получаем, согласно равенствам Хессе и Циммера, см. [22] и [23], что

$$M_\alpha \left(\Delta(f(S_\varepsilon), f(S_{\varepsilon_0}); D_*))\right) \leq \frac{c}{M_p^s(f(\Sigma))}, \tag{2.7}$$

$\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, $1 < \alpha < \infty$, $n-1 < p < \infty$, поскольку $f(\Sigma) \subset \Sigma(f(S_\varepsilon), f(S_{\varepsilon_0}); D_*)$, где Σ обозначает совокупность всех геодезических сфер с центром в точке P_0, расположенных между сферами S_ε и S_{ε_0}, а $\Sigma(f(S_\varepsilon), f(S_{\varepsilon_0}); D_*)$ состоит из всех замкнутых множеств в D_*, отделяющих $f(S_\varepsilon)$ и $f(S_{\varepsilon_0})$, а c – постоянная, произвольно близкая к единице в достаточно малых окрестностях P_0. Таким образом, из теоремы 2.1 и соотношения (2.7) получаем оценку (2.5), где интеграл $I = I(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определен в (2.6). $\square$

Аналог приведенной ниже леммы был ранее получен в $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, относительно конформного модуля, см. лемму 3 в [2].

Лемма 2.3. *Пусть D – область на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, $P_0 \in \overline{D}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < d_0 := \sup\limits_{P \in D} d(P, P_0)$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ – геодезическое кольцо, $B(P_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки P_0 и пусть $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция, которая интегрируема в степени s, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$, где $p > n-1$ в $B(P_0, \varepsilon_0)$. Пусть*

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I \cdot \|Q\|_s(P_0, t)},$$

где $\|Q\|_s(P_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и $I = I(P_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определены в (2.4) и (2.6), соответственно. Тогда

$$1/I^s = \int\limits_{\mathbb{A} \, \cap D} Q^s(P) \cdot \eta_0^\alpha \left(d(P, P_0)\right) \, dV \leq \int\limits_{\mathbb{A} \, \cap D} Q^s(P) \cdot \eta^\alpha \left(d(P, P_0)\right) \, dV, \tag{2.8}$$

где $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$ *для любой борелевой функции* $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, *такой, что*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr = 1. \tag{2.9}$$

Proof. В дальнейшем мы пользуемся тем обстоятельством, что по замечанию 1.2 элементы объема и площадей на геодезических сферах в нормальных окрестностях точки P_0 эквивалентны евклидовым с коэффициентом эквивалентности произвольно близким к единице в достаточно малых окрестностях, а радиусы геодезических сфер $S(P_0, r)$ совпадают с евклидовыми.

Если $I = \infty$, то левая часть соотношения (2.8) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Заметим, что если $I = 0$, то $\|Q\|_s(P_0, r) = \infty$ для п.в. $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, что невозможно ввиду интегрируемости Q^s в $B(P_0, \varepsilon_0)$. Поэтому можно считать, что $0 < I < \infty$. Тогда $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в $(\varepsilon, \varepsilon_0)$, поскольку $\|Q\|_s(P_0, r) \neq 0$ п.в. Кроме того, $\|Q\|_s(P_0, r) \neq \infty$ п.в. поскольку $Q \in L^s(B(P_0, \varepsilon_0))$. Полагая

$$\beta(r) = \eta(r) \cdot \|Q\|_s(P_0, r)$$

и

$$\omega(r) = [\|Q\|_s(P_0, r)]^{-1},$$

будем иметь, что $\eta(r) = \beta(r)\omega(r)$ п.в. в $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ и что

$$C := \int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D} Q^s(P) \cdot \eta^{\alpha}\left(d(P, P_0)\right)\ dV = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \beta^{\alpha}(r)\omega(r)dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см., напр., теорему 2.6.2 в [18], к выпуклой функции $\varphi(t) = t^{\alpha}$, заданной в интервале $\Omega = (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_{E} \omega(r)\ dr,$$

получаем что

$$\left(\frac{1}{I} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \beta^{\alpha}(r)\omega(r)dr\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{1}{I} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \beta(r)\omega(r)\ dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \beta(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (2.9). Таким образом,

$$C \geq \frac{1}{I^s},$$

что и доказывает (2.8). $\square$

Следствие 2.4. *При условиях и обозначениях лемм 2.2 и 2.3,*

$$M_{\alpha}(\Delta(f(S_{\varepsilon}), f(S_{\varepsilon_0}); D_*)) \leq c \int\limits_{\mathbb{A}\ \cap D} Q^s(P)\ \eta^{\alpha}(d(P, P_0))\ dV, \tag{2.10}$$

где $S_{\varepsilon} = S(P_0, \varepsilon)$ *и* $S_{\varepsilon_0} = S(P_0, \varepsilon_0)$.

Другими словами, это означает, что нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с $Q \in L^s(B(P_0, \varepsilon_0))$, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$, является Q_*-кольцевым гомеоморфизмом относительно α-модуля с $Q_* = Q^s$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Ясно, что $\alpha > p$ при $n \geq 2$, [5].

Отметим, что теория нижних Q-отображений применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{loc}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{loc}$ при $p > n - 1$ (см. [1], [11]– [13]). В работах [8], [20] также приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

3 Об обобщенных квазиизометриях

Говорим, что отображение $f : \mathbb{M}^n \to \mathbb{M}^n_*$, $n \geq 2$, называется *липшицевым*, если для некоторого $L < \infty$ и для всех P, T из $(\mathbb{M}^n, g)$, выполнено неравенство

$$d_*(f(P), f(T)) \leq L\, d(P, T),$$

где d и d_* – геодезические расстояния на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно. Наименьшая из таких констант называется *константой Липшица* и обозначается $Lip(f)$. Одним из примеров липшицевой функции в $\mathbb{R}^n$ может служить функция $f(x) = dist(x, F)$, где F – замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, причем, $Lip(f) = 1$.

Существует также и более узкий класс отображений, чем липшицевы, а именно, билипшицевы отображения.

Говорим также, что отображение $f : \mathbb{M}^n \to \mathbb{M}^n_*$, $n \geq 2$, *билипшицево*, если оно, во-первых, липшицево, а во-вторых,

$$L^*\, d(P, T) \leq d_*(f(P), f(T))$$

для некоторого $L^* > 0$ и для всех P и T из $(\mathbb{M}^n, g)$.

Пусть далее Ω – открытые множества на $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, $f : \Omega \to \mathbb{M}^n_*$ – непрерывное отображение. Аналогично [10], см. также [16] говорим, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{M}^n_*$ *конечно липшицево*, если $L(P, f) < \infty$ для всех $P \in \Omega$, и *конечно билипшицево*, если

$$0 < l(P, f) \leq L(P, f) < \infty$$

для всех $P \in \Omega$, где

$$L(P, f) = \limsup_{T \to P} \frac{d_*(f(P), f(T))}{d(P, T)}, \tag{3.1}$$

$T \in \mathbb{M}^n$, и

$$l(P, f) = \liminf_{T \to P} \frac{d_*(f(P), f(T))}{d(P, T)}.$$

Очевидно, что каждое липшицево отображение является конечно липшицевым и, соответственно, каждое билипшицево отображение является конечно билипшицевым.

Обозначим далее через $K_p(P,f)$ *внешнюю дилатацию* на $(\mathbb{M}^n,g)$, $n\geq 2$, определяемую следующим образом:

$$K_p(P,f)=\begin{cases}\frac{L^p(P,f)}{J(P,f)} & \text{при } J(P,f)\neq 0,\\ 1 & \text{при } L(P,f)=0,\\ \infty & \text{в остальных точках}\end{cases}, \qquad (3.2)$$

где

$$J(P,f)=\lim_{r\to 0}\frac{V_*(f(B(P,r)))}{V(B(P,r))} \quad \text{п.в.} \qquad (3.3)$$

Напомним, что при $p=n$ получаем внешнюю дилатацию $K(P,f)$ отображения f, определенную стандартным образом, см., напр., п. 3 в [1]. Напомним также, что $\|f'(x)\|$ в $\mathbb{R}^n$ обозначает матричную норму якобиевой матрицы f' отображения f в точке $x\in D$, $\|f'(x)\|=\sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n,|h|=1}|f'(x)\cdot h|$, $J_f(x)=\det\, f'(x)$ – якобиан отображения f и $K_f(x)=\|f'(x)\|^n/J_f(x)$ – внешнюю дилатацию отображения f в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.1. Переходя к локальным координатам, по замечанию 1 видим, что определения $L(P,f)$ из (3.1) и $\|f'(x)\|$ в $\mathbb{R}^n$, внешней дилатации $K_p(P,f)$ из (3.2) и $K_f(x)$ в $\mathbb{R}^n$, а также обобщенного якобиана $J(P,f)$ из (3.3) и $J_f(x)$ из $\mathbb{R}^n$, соответственно, согласованы в точках дифференцируемости отображения f. Заметим также, что величина $K_f(x)$ инвариантна относительно замен локальных координат. Таким образом, как видно из нормальных координат, $K_p(P,f)$ можно вычислять п.в. через $K_f(x)$ и в любых локальных координатах для указанных отображений.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Впервые аналогичный результат был получен в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, см. следствие 5.15 в [10], см. также следствие 10.10 в [16].

Теорема 3.2. *Пусть $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$, $n\geq 2$, – гладкие римановы многообразия, Ω – открытое множество из $(\mathbb{M}^n,g)$. Тогда любой конечно билипшицевый гомеоморфизм $f:\Omega\to\mathbb{M}^n_*$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля, $p\in(0,\infty)$, с $Q(x)=K_p(P,f)$.*

Proof. Более того, покажем, что

$$M_p(f\Gamma)\ \geq\ \inf_{\varrho\in ext_p\, adm\Gamma}\int\limits_{\Omega}\frac{\varrho^p(P)}{K_p(P,f)}\,dV$$

для любого семейства Γ $(n-1)$-мерных поверхностей S в Ω.

Пусть далее B – (борелевское) множество всех точек P из Ω, где, согласно замечаниям 1.2 и 3.1, f имеет дифференциал $f'(P)$ и $J(P,f)\neq 0$. Известно, что B является объединением счетного набора борелевских множеств B_l, $l=1,2,\ldots$, таких, что $f_l=f|_{B_l}$ билипшицево, см., напр., пункт 3.2.2 в [21]. Не ограничивая общности, можно считать, что B_l попарно не пересекаются. Отметим, что $B_0=\Omega\setminus B$ и $f(B_0)$ имеет нулевую меру в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно, ввиду билипшицевости отображения f, см. следствие 8.1 в [16] и замечание 1.2. Таким образом, по теореме 2.4 в [10], см. теорему 9.1 в [16], $A_S(B_0)=0$ для p-п.в. $S\in\Gamma$ и, т.к. f – конечно билипшицевый гомеоморфизм, $A_{S_*}(f(B_0))=0$ для p-п.в. $S\in\Gamma$, где $S_*=f\circ S$.

Пусть $\varrho_* \in adm\, f\Gamma$, $\varrho_* \equiv 0$ вне $f(\Omega)$, и пусть $\varrho \equiv 0$ вне Ω и

$$\varrho(P) \ = \ \varrho_*(f(P))\, L(P,f)$$

для п.в. $P \in \Omega$.

Рассуждая на каждом B_l, по 3.2.20 и 1.7.6 в [21] получаем, что

$$\int\limits_S \varrho^{n-1}\, d\mathcal{A} \ \geq \ \int\limits_{S_*} \varrho_*^{n-1}\, d\mathcal{A}_* \ \geq \ 1$$

для p-п.в. $S \in \Gamma$ и, таким образом, $\varrho \in ext_p\, adm\, \Gamma$.

С помощью замены переменных для класса конечно билипшицевых функций, см., напр., пункт 3.2.5 в [21], и теоремы Лебега получаем, что

$$\sum_l \int\limits_{B_l} \frac{\varrho^p(P)}{K_p(P,f)}\, dV \ = \int\limits_{\Omega} \frac{\varrho^p(P)}{K_p(P,f)}\, dV \ = \int\limits_{f(\Omega)} \varrho_*^p(T)\, dV_*,$$

что и приводит к нужному неравенству. □

4 О граничном поведении конечно билипшицевых гомеоморфизмов

Далее, учитывая теоремы о граничном поведении нижних Q-гомеоморфизмов из п. 6 статьи [1], в качестве следствий получаем ряд теорем о граничном поведении конечно билипшицевых гомеоморфизмов на гладких римановых многообразиях.

Аналогично [16] говорим, что граница области D – *слабо плоская в точке* $P_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки P_0 найдется ее окрестность $V \subset U$, такая, что

$$M(\Delta(E,F;D)) \geq P$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Также говорим, что граница области D *сильно достижима в точке* $P_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки P_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки P_0 и число $\delta > 0$, такие, что

$$M(\Delta(E,F;D)) \geq \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Наконец говорим, что граница области D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

Напомним также, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Область D называется *локально связной в точке* $P_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки P_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки P_0, такая, что $V \cap D$ связно, ср. [14, с. 232].

По теореме 6.1 в [1] из теоремы 2 получаем следующее заключение.

Теорема 4.1. *Пусть D локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, ∂D_* – слабо плоская. Если $f : D \to D_*$ – конечно билипшицевый гомеоморфизм с $K(P,f) \in L^{n-1}(D)$, то f^{-1} имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

Замечание 4.2. Отметим, что здесь условие $K(P,f)\in L^{n-1}(D)$ нельзя заменить на условие $K(P,f)\in L^p(D)$ ни при каком $p<n-1$, см., примеры липшицевых отображений в доказательстве теоремы 5 в [7]. Однако, здесь достаточно предполагать, что $K(P,f)\in L^{n-1}(D\cap U)$ для некоторой окрестности U границы D.

По теореме 9.2 в [9] из теоремы 2 также имеем следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть D локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, ∂D_* – слабо плоская и*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K\|_{n-1}(P_0,r)}=\infty \qquad \forall\ P_0\in\partial D \tag{4.1}$$

для некоторого $\delta(P_0)\in(0,d(P_0))$, где $d(P_0):=\sup\limits_{P\in D} d(P,P_0)$, такого, что $B(P_0,\delta(P_0))$ – нормальная окрестность точки P_0 и

$$\|K\|_{n-1}(P_0,r)=\left(\int\limits_{S(P_0,r)} K^{n-1}(P,f)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Тогда, для любого конечно билипшицевого гомеоморфизма $f:D\to D_*$, его обратное отображение f^{-1} допускает непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.

При этом мы также воспользовались нормальными окрестностями, предложением 1 и замечанием 1.

Аналогично по лемме 6.1 в [9] и теореме 2 имеем:

Лемма 4.4. *Пусть D локально связна в $P_0\in\partial D$, ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(P_0,f)=\{T\in\mathbb{M}^n_*: T=\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k),\ \ P_k\to P_0,\ P_k\in D\}$ и $\overline{D_*}$ компактно, $K(P,f):\mathbb{M}^n\to(0,\infty)$ – измеримая функция и пусть $f:D\to D_*$ – конечно билипшицевый гомеоморфизм в точке P_0. Если условие (4.1) выполнено в точке P_0, то f продолжим в P_0 по непрерывности.*

Следствие 4.5. *Пусть D локально связна в точке $P_0\in\partial D$, ∂D_* сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f:D\to D_*$ – конечно билипшицевый гомеоморфизм с*

$$K(P,f)=O\left(\log\frac{1}{r}\right) \quad \text{при}\ \ r:=d(P,P_0)\to 0.$$

Тогда f допускает продолжение в точку P_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$.

Наконец, на основе теоремы 4.3 и леммы 4.4, приходим к следующему заключению.

Теорема 4.6. *Пусть D локально связна на границе, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, ∂D_* – слабо плоская. Тогда любой конечно билипшицевый гомеоморфизм $f:D\to D_*$ с условием (4.1) допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}:\overline{D}\to\overline{D_*}$.*

Следствие 4.7. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и пусть $f : D \to D_*$ – конечно билипшицевый гомеоморфизм с*

$$K(P, f) = O\left(\log\frac{1}{r}\right) \qquad \text{при} \;\; r := d(P, P_0) \to 0 \quad \forall\ P_0 \in \partial D.$$

Тогда f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.

References

[1] Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестник. — Т. 8, № 3. — 2011. — С. 319–342.

[2] Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. О взаимосвязи кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов на границе // Труды ИПММ НАН Украины. — 2011. — Т. 23. — С. 13–20.

[3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

[4] Gehring F.W. Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications Vol. 2. — Vienna: International Atomic Energy Agency, 1976.

[5] Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. — Vol. 3(LXI), № 1. — 2012. — P. 49–66.

[6] Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 245 с.

[7] Kovalev L., Onninen J. Boundary values of mappings of finite distortion // Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat. — 2003. — Vol. 92. — P. 175–182.

[8] Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. — Т. 25, № 4. — 2013. — С. 101–124.

[9] Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. — 2008. — Т. 5, № 2. — С. 159–184.

[10] Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. — Vol. 104. — 2008. — P. 291—306.

[11] Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Граничное поведение классов Орлича-Соболева // Матем. заметки. — Т. 95, № 4. — 2014. — С. 564–576.

[12] Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича-Соболева // Алгебра и анализ. — Т. 25, № 6. — 2013. — С. 50–102.

[13] Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // Ann. Univ.Bucharest, Ser. Math. — Vol. 3, № 1. — 2012. — P. 67–78.

[14] Куратовский К. Топология. Т. 2. — М.: Мир, 1969. — 623 с.

[15] Lee J.M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. — New York: Springer, 1997. — 224 pp.

[16] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. — Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009. — 367 pp.

[17] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во. МГУ, 1990. — 384 с.

[18] Ransford Th. Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Univ. Press, 1995.

[19] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1953. — 664 с.

[20] Салимов Р.Р. Нижние оценки модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — Т. 26, № 6. — 2014. — С. 143–171.

[21] Federer H. Geometric Measure Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[22] Hesse J. A p-extremal length and p – capacity equality // Ark. Mat. — 1975. — Vol. 13. — P. 131–144.

[23] Ziemer W.P. Extremal length and p-capacity // Michigan Math. J. Vol. 16. — 1969. — P. 43–51.

Афанасьева Елена Сергеевна
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург 74, Донецк, 83114.
Рабочий телефон: 311-01-45
E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru, smolovayaes@yandex.ru